# 10届全国高中数学联赛试题及答案

来源：网络 作者：梦里花开 更新时间：2024-07-15

*2024年全国高中数学联赛一试一、填空题（每小题8分，共64分，）1.函数的值域是.2.已知函数的最小值为，则实数的取值范围是.3.双曲线的右半支与直线围成的区域内部（不含边界）整点（纵横坐标均为整数的点）的个数是.4.已知是公差不为的等差...*

2024年全国高中数学联赛

一

试

一、填空题（每小题8分，共64分，）

1.函数的值域是

.2.已知函数的最小值为，则实数的取值范围是

.3.双曲线的右半支与直线围成的区域内部（不含边界）整点（纵横坐标均为整数的点）的个数是

.4.已知是公差不为的等差数列，是等比数列，其中，且存在常数使得对每一个正整数都有，则

.5.函数

在区间上的最大值为8，则它在这个区间上的最小值是

.6.两人轮流投掷骰子，每人每次投掷两颗，第一个使两颗骰子点数和大于6者为胜，否则轮由另一人投掷.先投掷人的获胜概率是

.7.正三棱柱的9条棱长都相等，是的中点，二面角,则

.8.方程满足的正整数解（x,y,z）的个数是

.二、解答题（本题满分56分）

9.（16分）已知函数，当时，试求的最大值.10.（20分）已知抛物线上的两个动点，其中且.线段的垂直平分线与轴交于点，求面积的最大值.11.（20分）证明：方程恰有一个实数根，且存在唯一的严格递增正整数数列，使得

.解

答

1.提示：易知的定义域是，且在上是增函数，从而可知的值域为.2.提示：令，则原函数化为，即

.由，及

知

即

.（1）

当时（1）总成立；

对；对.从而可知

.3.9800

提示：由对称性知，只要先考虑轴上方的情况，设与双曲线右半支于,交直线于，则线段内部的整点的个数为，从而在轴上方区域内部整点的个数为

.又轴上有98个整点，所以所求整点的个数为.4.提示

：设的公差为的公比为，则

（1），（2）

（1）代入（2）得，求得.从而有

对一切正整数都成立，即

对一切正整数都成立.从而，求得，.5.提示：令则原函数化为,在上是递增的.当时，,，所以；

当时，，所以

.综上在上的最小值为.6.提示：同时投掷两颗骰子点数和大于6的概率为，从而先投掷人的获胜概率为

.7.提示：解法一：如图，以所在直线为轴，线段中点为原点，所在直线为轴，建立空间直角坐标系.设正三棱柱的棱长为2，则，从而，.设分别与平面、平面垂直的向量是、，则

由此可设，所以，即

.所以

.解法二：如图，.设与交于点

则

.从而平面

.过在平面上作,垂足为.连结,则为二面角的平面角.设,则易求得.在直角中，,即

.又

..8.336675

提示：首先易知的正整数解的个数为

.把满足的正整数解分为三类：

（1）均相等的正整数解的个数显然为1；

（2）中有且仅有2个相等的正整数解的个数，易知为1003；

(3)设两两均不相等的正整数解为.易知，所以，即

.从而满足的正整数解的个数为

.9.解法一：

由

得

.所以，所以.又易知当（为常数）满足题设条件，所以最大值为.解法二：.设，则当时，.设，则..容易知道当时，.从而当时，即，从而,，由

知.又易知当（为常数）满足题设条件，所以最大值为.10.解法一：设线段的中点为，则，.线段的垂直平分线的方程是

.（1）

易知是（1）的一个解，所以线段的垂直平分线与轴的交点为定点，且点坐标为.由（1）知直线的方程为，即

.（2）

（2）代入得，即

.（3）

依题意，是方程（3）的两个实根，且，所以,..定点到线段的距离

..当且仅当，即,或时等号成立.所以，面积的最大值为.解法二：同解法一，线段的垂直平分线与轴的交点为定点，且点坐标为.设，则的绝对值，所以,当且仅当且，即,或

时等号成立.所以，面积的最大值是.11.令，则，所以是严格递增的.又，故有唯一实数根.所以，.故数列是满足题设要求的数列.若存在两个不同的正整数数列和满足，去掉上面等式两边相同的项，有，这里，所有的与都是不同的.不妨设，则，矛盾.故满足题设的数列是唯一的.加

试

1.（40分）如图，锐角三角形ABC的外心为O，K是边BC上一点（不是边BC的中点），D是线段AK延长线上一点，直线BD与AC交于点N，直线CD与AB交于点M．求证：若OK⊥MN，则A，B，D，C四点共圆．

2.（40分）设k是给定的正整数，．记，．证明：存在正整数m，使得为一个整数．这里，表示不小于实数x的最小整数，例如：，．

3.（50分）给定整数，设正实数满足，记

．

求证：

．

4.（50分）一种密码锁的密码设置是在正n边形的每个顶点处赋值0和1两个数中的一个，同时在每个顶点处涂染红、蓝两种颜色之一，使得任意相邻的两个顶点的数字或颜色中至少有一个相同．问：该种密码锁共有多少种不同的密码设置？

解

答

1.用反证法．若A，B，D，C不四点共圆，设三角形ABC的外接圆与AD交于点E，连接BE并延长交直线AN于点Q，连接CE并延长交直线AM于点P，连接PQ．

因为P的幂（关于⊙O）K的幂（关于⊙O），同理，所以，故⊥．

由题设，OK⊥MN，所以PQ∥MN，于是

．

①

由梅内劳斯（Menelaus）定理，得，②

．

③

由①，②，③可得，所以，故△DMN

∽

△DCB，于是，所以BC∥MN，故OK⊥BC，即K为BC的中点，矛盾！从而四点共圆.注1：“P的幂（关于⊙O）K的幂（关于⊙O）”的证明：延长PK至点F，使得，④

则P，E，F，A四点共圆，故，从而E，C，F，K四点共圆，于是，⑤

⑤-④，得

P的幂（关于⊙O）K的幂（关于⊙O）．

注2：若点E在线段AD的延长线上，完全类似．

2.记表示正整数n所含的2的幂次．则当时，为整数．

下面我们对用数学归纳法．

当时，k为奇数，为偶数，此时

为整数．

假设命题对成立．

对于，设k的二进制表示具有形式，这里，或者1，．

于是，①

这里

.显然中所含的2的幂次为．故由归纳假设知，经过f的v次迭代得到整数，由①知，是一个整数，这就完成了归纳证明．

3.由知，对，有．

注意到当时，有，于是对，有，故

．

4.对于该种密码锁的一种密码设置，如果相邻两个顶点上所赋值的数字不同，在它们所在的边上标上a，如果颜色不同，则标上b，如果数字和颜色都相同，则标上c．于是对于给定的点上的设置（共有4种），按照边上的字母可以依次确定点上的设置．为了使得最终回到时的设置与初始时相同，标有a和b的边都是偶数条．所以这种密码锁的所有不同的密码设置方法数等于在边上标记a，b，c，使得标有a和b的边都是偶数条的方法数的4倍．

设标有a的边有条，标有b的边有条，．选取条边标记a的有种方法，在余下的边中取出条边标记b的有种方法，其余的边标记c．由乘法原理，此时共有种标记方法．对i，j求和，密码锁的所有不同的密码设置方法数为

．

①

这里我们约定．

当n为奇数时，此时

．

②

代入①式中，得

．

当n为偶数时，若，则②式仍然成立；若，则正n边形的所有边都标记a，此时只有一种标记方法．于是，当n为偶数时，所有不同的密码设置的方法数为

．

综上所述，这种密码锁的所有不同的密码设置方法数是：当n为奇数时有种；当n为偶数时有种．

本文档由站牛网zhann.net收集整理，更多优质范文文档请移步zhann.net站内查找